Τετάρτη 20/02/2019

Ορισμός: Ομάδα $(G,*)$ είναι ένα σύνολο G μαζί με μια διμελή πράξη $*$ τέτοια ώστε:

1) $\forall a,b,\gamma \in G$ ισχύει $a*(b*\gamma) = (a*b)*\gamma$.
2) Υπάρχει $e \in G$ τ.ω $a*e = e*a = a$ $\forall a \in G$
3) $\forall a \in G$ $\exists a' \in G$ τ.ω $a*a' = a'*a = e$ (αντίστροφο ή αντίθετο).

Παράδειγμα: $S = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Ορίζουμε στο S την $*$: $a*b = a+b+ab$ πρόσθεση πραγματικών αριθμών. πολλ/σμος των πραγμ. αριθμών

Δείξτε ότι η $*$ είναι διμελής πράξη και ότι το $(S,*)$ είναι ομάδα.
Είναι η $(S,*)$ αβελιανή ομάδα;

1) Έστω $a,b \in S \Rightarrow$ $a,b \in \mathbb{R}$, $a \neq -1 \neq b$ $a*b = a+b+ab \in \mathbb{R}$

Για το $a*b$ έχουμε δύο περιπτώσεις

(i) $a*b = a+b+ab = -1 \Rightarrow a+b+ab+1 = 0 \Rightarrow (a+1)(b+1) = 0 \Rightarrow a = -1$ ή $b = -1$ Άτοπο

(ii) $a*b = a+b+ab \neq -1 \Rightarrow a*b \in S$. Άρα η $*$ είναι διμελής πράξη.

Έλεγχος για το αν είναι ομάδα:

(i) Έστω $a,b,\gamma \in S$: $a*(b*\gamma) = a*(b+\gamma+b\gamma) = a+(b+\gamma+b\gamma)+a(b+\gamma+b\gamma) =$
$= a+b+\gamma+b\gamma+ab+a\gamma+ab\gamma$

$(a*b)*\gamma = (a+b+ab)*\gamma = a+b+ab+\gamma+(a+b+ab)\gamma = a+b+\gamma+ab+a\gamma+b\gamma+ab\gamma$

Άρα $a*(b*\gamma) = (a*b)*\gamma$

(ii) $0 \in S$ $\quad a*0 = a + 0 + a\cdot 0 = a$

$0*a = 0 + a + 0a = a$

Πρέπει $a*e = a \Rightarrow a+e+ea = a$
$\Rightarrow e(a+1) = 0$
$\overset{a\neq -1}{\Rightarrow} e = 0$

Άρα το 0 είναι το ουδέτερο στοιχείο.

(iii) Έστω $a \in S$ $(a \neq -1 \Rightarrow a+1 \neq 0)$. Πρέπει $a*a' = 0$. (1)

Θέτω $a' = \frac{-a}{1+a}$: $\quad * \ a*a' = a + a' + a\cdot a' = a + \frac{-a}{1+a} + a\frac{-a}{1+a} = \dots = 0$

$* \ a'*a = a' + a + a'a = \frac{-a}{1+a} + a + a\left(\frac{-a}{1+a}\right) = \dots = 0$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} a*a' = 0 \Rightarrow a + a' + a\cdot a' = 0 \Rightarrow a'(a+1) = -a \Rightarrow \boxed{a' = \frac{-a}{1+a}}$

Ανήκει όμως το a' στο S? Έστω ότι $a' \notin S$ με $a' = \frac{-a}{1+a}$

$\frac{-a}{1+a} = -1 \Rightarrow -a = -1-a \Rightarrow 0 = -1$ Άτοπο. Άρα το $a' \in S$

Άρα το $(S,*)$ είναι ομάδα.

(Είναι αβελιανή αν $a*b = b*a$)

$a*b = a+b+ab = b+a+ba = b*a$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Άρα το $(S,*)$ αβελιανή ομάδα

Παράδειγμα. $\mathbb{Z}_8 = \{[0]_8, [1]_8, [2]_8, [3]_8, [4]_8, [5]_8, [6]_8, [7]_8\}$.

$(\mathbb{Z}_8, +)$

$(\mathbb{Z}_8, \cdot)$ $\quad$ αντιστρέψιμα στοιχεία

$U(\mathbb{Z}_8) = (\{[1]_8, [3]_8, [5]_8, [7]_8\}, \cdot)$ ομάδα

$U(\mathbb{Z}_m) = \{ [a]_m \mid \mu\kappa\delta(a,m) = 1 \}$

$[U(\mathbb{Z}_m), \cdot]$ είναι ομάδα (ουδέτερο στοιχείο το 1, κάθε στοιχείο είναι αντιστρέψιμο)

$|U(\mathbb{Z}_m)| = \varphi(m)$.

<u>Ορισμός</u>: Ονομάζουμε τάξη μιας ομάδας G το πλήθος των στοιχείων της G και την συμβολίζουμε $|G|$.

⊛ Όταν βλέπω $\mathbb{Z}_m$ τότε εννοείται $\mathbb{Z}_m = (\mathbb{Z}_m, +)$ ενώ στο $U(\mathbb{Z}_m)$ σημαίνει ότι η πράξη είναι ο πολλαπλασιασμός.

$\mathbb{Z}_m = (\mathbb{Z}_m, +)$

$U(\mathbb{Z}_m) = (U(\mathbb{Z}_m), \cdot)$

$\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +)$

$\mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^* = (\mathbb{R}^*, \cdot)$

$\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +)$

$\mathbb{C}^* = (\mathbb{C}^*, \cdot)$

$\mathbb{R}^{m\times n} = (\mathbb{R}^{m\times n}, +)$ → το σύνολο των $m\times n$ πραγματικών πινάκων.

$\mathbb{R}^{n\times n}$ δεν είναι ομάδα με πράξη τον πολ/μό πινάκων.

$Gl_n(\mathbb{R}) = \{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A \neq 0 \}$

όλοι οι $n\times n$ πραγματικοί αντιστρέψιμοι πίνακες

$(Gl_n(\mathbb{R}))$ είναι ομάδα ως προς τον πολ/σμό

Η $Gl_n(\mathbb{R})$ δεν είναι αβελιανή για $n \neq 1$.

$Sl_n(\mathbb{R}) = \{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A = 1 \}$

ομάδα ως προς τον πολ/σμό

$A \cdot A^{-1} = I_n \Rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = \det I_n \Rightarrow \det A^{-1} = 1 \Rightarrow A^{-1} \in Sl_n(\mathbb{R})$.

$(S = \{a\}, *)$ $\qquad \alpha * \alpha = \alpha$

(i) $\alpha * \underset{\alpha}{\underset{\shortparallel}{(\alpha * \alpha)}} = (\alpha * \alpha) * \alpha = \alpha$

(ii) $\alpha * \alpha = \alpha * \alpha = \alpha$

(iii) $\alpha * \boxed{\alpha} = a = \boxed{\alpha} * \alpha$ $\qquad ([0], +), \; (\{1\}, \cdot)$

$\mathbb{Z}_2 = \{ [0]_2, [1]_2 \}$ με $|\mathbb{Z}_2| = 2$

$U(\mathbb{Z}_3) = \{ [1]_3, [2]_3 \}$ $\qquad |U(\mathbb{Z}_3)| = 2$

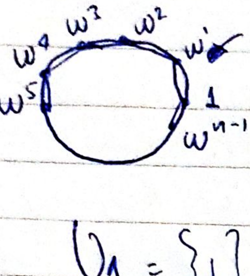
$U(\mathbb{Z}_4) = \{ [1]_4, [3]_4 \}$ $\qquad |U(\mathbb{Z}_4)| = 2$

$(\{1, -1\}, \cdot)$ με $|\{1, -1\}| = 2$

$U_n = \{a \in \mathbb{C} \mid a^n = 1\} \subseteq \mathbb{C}$

← οι n-οστές ρίζες της μονάδας.

$= \{\sigma\upsilon\nu(\frac{2k\pi}{n}) + i\eta\mu(\frac{2k\pi}{n}) \mid 0 \le k \le n-1\}$.



κανονικό n-γωνο $= \{\omega^k \mid 0 \le k \le n-1, \ \omega = \sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi}{n}) + i\eta\mu(\frac{2\pi}{n})\}$

$= \{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{n-1}\}$ με $|U_n| = n$

$U_1 = \{1\}$, $U_2 = \{1, -1\}$.